

Guía de Estudio: Álgebra Lineal — Espacios Vectoriales

Transformaciones Lineales, Bases y Diagonalización

Martín Ibáñez

Índice

1. Parte 1 — Resumen Conceptual	2
1.1. Espacio Vectorial	2
1.2. Subespacio Vectorial	2
1.3. Combinación Lineal y Generadores	2
1.4. Dependencia e Independencia Lineal	3
1.5. Base y Dimensión	3
1.6. Cambio de Base	3
1.7. Transformaciones Lineales	3
1.8. Núcleo e Imagen	3
1.9. Teorema Rango-Nulidad	4
1.10. Valores y Vectores Propios	4
1.11. Diagonalización	4
2. Parte 2 — Fórmulas y Definiciones Clave	5
3. Parte 3 — Ejercicios Resueltos Paso a Paso	7

Parte 1 — Resumen Conceptual

Espacio Vectorial

Espacio Vectorial

Un conjunto V con operaciones suma $(+)$ y multiplicación por escalar $(\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ si cumple 8 axiomas:

1. $u + v \in V$ (cerradura suma)
2. $u + v = v + u$ (conmutatividad)
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (asociatividad)
4. Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ (neutro aditivo)
5. Para cada u existe $-u$ tal que $u + (-u) = 0$ (inverso aditivo)
6. $\alpha u \in V$ (cerradura producto escalar)
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributividad escalar)
8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributividad vectorial)

Ejemplos: $\mathbb{R}^n$, matrices $M_{m \times n}$, polinomios $\mathcal{P}_n$.

Subespacio Vectorial

Subespacio Vectorial

$H \subseteq V$ es subespacio si:

1. $0 \in H$
2. $u, v \in H \Rightarrow u + v \in H$ (cerradura suma)
3. $u \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in H$ (cerradura producto escalar)

Combinación Lineal y Generadores

Un vector v es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$ si existen escalares α_i tales que $v = \sum \alpha_i v_i$. El conjunto generado $\langle S \rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de S .

Dependencia e Independencia Lineal

Independencia Lineal

$\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente (LI) si la única solución de $\sum \alpha_i v_i = 0$ es $\alpha_i = 0$ para todo i . Si existe solución no trivial, son linealmente dependientes (LD).

Base y Dimensión

Base

Una base $\mathcal{B}$ de V es un conjunto generador LI. Todo vector se expresa de forma única como combinación lineal de la base.

Dimensión

La dimensión de V , denotada $\dim(V)$, es el número de vectores en cualquier base.

Cambio de Base

Si $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ son bases, existe $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ (matriz de cambio) tal que $[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$.

Transformaciones Lineales

Transformación Lineal

$T : V \rightarrow W$ es lineal si:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Núcleo e Imagen

Núcleo e Imagen

- Núcleo: $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ (subespacio de V) - Imagen: $\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$ (subespacio de W)

Teorema Rango-Nulidad

Teorema Rango-Nulidad

Para $T : V \rightarrow W$ lineal:

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V)$$

Valores y Vectores Propios

Valores y Vectores Propios

$v \neq 0$ es vector propio de A con valor propio λ si $Av = \lambda v$. Se obtienen resolviendo $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalización

Diagonalización

A es diagonalizable si existe P invertible tal que $P^{-1}AP = D$ (diagonal). Ocurre cuando A tiene n vectores propios LI.

Parte 2 — Fórmulas y Definiciones Clave

Fórmulas Esenciales

Axiomas de Espacio Vectorial

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. $u + 0 = u$
5. $u + (-u) = 0$
6. $\alpha u \in V$
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

Criterio de Subespacio

1. $0 \in H$
2. $u, v \in H \Rightarrow u + v \in H$
3. $u \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in H$

Polinomio Característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Teorema Rango-Nulidad

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim(V)$$

Diagonalización

$$A = PDP^{-1} \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$u_1 = v_1, \quad u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

Parte 3 — Ejercicios Resueltos Paso a Paso

Nivel Escolar/Introdutorio

Ejercicio 1: Verificar subespacio

Enunciado: Determine si $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Estrategia: Verificar las 3 condiciones de subespacio.

Pasos:

1. **Cero:** $(0, 0, 0)$ cumple $0 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 \in H$.
2. **Suma:** Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in H$. Entonces $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$.
3. **Producto escalar:** $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$. $\alpha x_1 - \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 - y_1 + z_1) = \alpha \cdot 0 = 0$.

Resultado: H es subespacio

Nota pedagógica: Las condiciones se verifican directamente usando la ecuación que define H .

Ejercicio 2: Independencia lineal

Enunciado: Determine si $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 2, 4)$ son LI en $\mathbb{R}^3$.

Estrategia: Calcular el determinante de la matriz formada por los vectores.

Pasos:

1. **Matriz:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. **Determinante:** $\det(A) = 1(0 \cdot 4 - 1 \cdot 2) - 2(1 \cdot 4 - 1 \cdot 2) + 3(1 \cdot 2 - 0 \cdot 2)$
3. **Calcular:** $= 1(0 - 2) - 2(4 - 2) + 3(2 - 0) = -2 - 4 + 6 = 0$

Resultado: Son LD (determinante = 0)

Nota pedagógica: El determinante cero indica que al menos un vector es combinación lineal de los otros.

Ejercicio 3: Base y dimensión del espacio nulo

Enunciado: Encuentre base y dimensión del espacio nulo de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Estrategia: Resolver $Ax = 0$ mediante eliminación de Gauss.

Pasos:

1. **Sistema:**
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
2. **Reducción:** La segunda es múltiplo de la primera. Queda $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
3. **Variables libres:** x_2 es libre, $x_1 = -2x_2$.

4. **Solución:** $x = (-2t, t, 0) = t(-2, 1, 0)$.

Resultado: $\boxed{\text{Base: } \{(-2, 1, 0)\}, \dim = 1}$

Nota pedagógica: El número de vectores en la base es el número de variables libres.

Ejercicio 4: Valores propios de matriz 2×2

Enunciado: Calcule los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Estrategia: Resolver $\det(A - \lambda I) = 0$.

Pasos:

1. **Matriz característica:** $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$
2. **Determinante:** $(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$
3. **Ecuación:** $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$
4. **Soluciones:** $(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 5$

Resultado: $\boxed{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5}$

Nota pedagógica: Para 2×2 el polinomio característico es siempre cuadrático.

Ejercicio 5: Diagonalizar matriz 2×2

Enunciado: Diagonalice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ del ejercicio anterior.

Estrategia: Encontrar vectores propios y formar P y D .

Pasos:

1. **Para $\lambda = 2$:** $(A - 2I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow v_1 = (1, -2)$.
2. **Para $\lambda = 5$:** $(A - 5I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 1)$.
3. **Matrices:** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
4. **Verificación:** $P^{-1}AP = D$.

Resultado: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$

Nota pedagógica: Valores propios distintos garantizan diagonalización.

Nivel Universitario

Ejercicio 6: Polinomios como espacio vectorial

Enunciado: Verifique que $\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es espacio vectorial.

Estrategia: Verificar los 8 axiomas con suma y producto usuales.

Pasos:

1. **Cerradura suma:** $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \in \mathcal{P}_2$.
2. **Conmutatividad:** Heredada de números reales.
3. **Asociatividad:** Heredada.
4. **Neutro:** $0x^2 + 0x + 0$.
5. **Inverso:** $(-a)x^2 + (-b)x + (-c)$.
6. **Cerradura escalar:** $\alpha(ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + (\alpha c) \in \mathcal{P}_2$.
7. **Distributividades:** Se verifican por propiedades de reales.

Resultado: $\mathcal{P}_2$ es espacio vectorial

Nota pedagógica: La verificación formal requiere comprobar todos los axiomas, aunque muchos se heredan.

Ejercicio 7: Núcleo e imagen de transformación lineal

Enunciado: Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = (x + y, y + z, z + w)$. Encuentre bases de $\ker T$ e $\text{Im } T$.

Estrategia: Resolver $T(v) = 0$ para núcleo; para imagen, tomar imágenes de la base canónica.

Pasos:

1. **Núcleo:**
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$$
2. **Solución:** De $z = -w$, $y = -z = w$, $x = -y = -w$. Entonces $v = (-w, w, -w, w) = w(-1, 1, -1, 1)$.
3. **Base núcleo:** $\{(-1, 1, -1, 1)\}$, $\dim \ker T = 1$.
4. **Imagen:** $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (1, 1, 0)$, $T(e_3) = (0, 1, 1)$, $T(e_4) = (0, 0, 1)$.
5. **Reducir:** Matriz con esos vectores: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por filas, son LI los 3 primeros.
6. **Base imagen:** $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Resultado: $\ker T : \{(-1, 1, -1, 1)\}, \operatorname{Im} T : \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

Nota pedagógica: La imagen se genera con las imágenes de la base canónica.

Ejercicio 8: Verificar teorema rango-nulidad

Enunciado: Para la T del ejercicio anterior, verifique el teorema rango-nulidad.

Estrategia: Calcular dimensiones y comprobar la suma.

Pasos:

1. **Dimensión núcleo:** $\dim \ker T = 1$ (del ejercicio 7).
2. **Dimensión imagen:** $\dim \operatorname{Im} T = 3$ (tres vectores LI).
3. **Suma:** $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 1 + 3 = 4$.
4. **Dominio:** $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

Resultado: $1 + 3 = 4$ se cumple

Nota pedagógica: El teorema es una identidad fundamental que relaciona núcleo e imagen.

Ejercicio 9: Matriz respecto a base no canónica

Enunciado: Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre el eje x : $T(x, y) = (x, 0)$. Encuentre $[T]_{\mathcal{B}}$ para $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

Estrategia: Calcular T de cada base, expresar en esa base.

Pasos:

1. **Imágenes:** $T(1, 1) = (1, 0)$, $T(1, -1) = (1, 0)$.
2. **Expresar en base $\mathcal{B}$:** Resolver $(1, 0) = \alpha(1, 1) + \beta(1, -1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$.
3. **Coordenadas:** $[T(1, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
4. **Misma para el otro:** $[T(1, -1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
5. **Matriz:** $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Resultado: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Nota pedagógica: Las columnas son las coordenadas de las imágenes de la base.

Ejercicio 10: Valores y vectores propios de matriz 3×3

Enunciado: Calcule valores y vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Estrategia: Resolver $\det(A - \lambda I) = 0$ y luego $(A - \lambda I)v = 0$.

Pasos:

1. **Determinante:** $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)[(4-\lambda)^2 - 1]$
2. **Igualar a cero:** $(3-\lambda)[(4-\lambda)^2 - 1] = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0$
3. **Factorizar:** $(3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \lambda = 3, 3, 5.$
4. **Para $\lambda = 3$:** $(A - 3I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + z = 0.$ Vectores:
 $(-z, y, z) = z(-1, 0, 1) + y(0, 1, 0).$ Base: $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}.$
5. **Para $\lambda = 5$:** $(A - 5I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$
 $x = z, y = 0.$ Vector: $(1, 0, 1).$

Resultado: $\lambda = 3 : \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}, \lambda = 5 : \{(1, 0, 1)\}$

Nota pedagógica: La multiplicidad algebraica 2 de $\lambda = 3$ da dos vectores LI.

Ejercicio 11: Diagonalizar y calcular potencia

Enunciado: Diagonalice A del ejercicio 10 y calcule A^5 usando D^5 .

Estrategia: Formar P con vectores propios y usar $A = PDP^{-1}$.

Pasos:

1. **Matriz P :** $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (columnas: v_1, v_2 para $\lambda = 3$, v_3 para $\lambda = 5$).
2. **Matriz D :** $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$
3. **Verificar:** Se cumple $A = PDP^{-1}$ (puede comprobarse).
4. **Potencia:** $A^5 = PD^5P^{-1}.$
5. D^5 : $D^5 = \begin{pmatrix} 3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 5^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & 0 & 0 \\ 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{pmatrix}.$
6. A^5 : $A^5 = PD^5P^{-1}$ (se puede calcular explícitamente si se requiere).

Resultado: $A^5 = P \begin{pmatrix} 243 & 0 & 0 \\ 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{pmatrix} P^{-1}$

Nota pedagógica: Las potencias de matrices diagonalizables se calculan fácilmente con D^n .

Ejercicio 12: Gram-Schmidt

Enunciado: Ortonormalice la base $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Estrategia: Aplicar Gram-Schmidt y luego normalizar.

Pasos:

1. **Primer vector:** $u_1 = v_1 = (1, 1, 0)$, $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$.
2. **Segundo vector:** $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$. $\langle v_2, u_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$, $\|u_1\|^2 = 2$.
 $u_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.
3. **Normalizar u_2 :** $\|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. $e_2 = \frac{(1/2, -1/2, 1)}{\sqrt{3/2}} = \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{6}}$.
4. **Tercer vector:** $u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$.

$$\langle v_3, u_1 \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1/2}{3/2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (0, 1, 1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

5. **Normalizar:** $\|u_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $e_3 = \frac{(-2/3, 2/3, 2/3)}{2/\sqrt{3}} = \frac{(-1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$.

Resultado:
$$e_1 = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{6}}, \quad e_3 = \frac{(-1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$$

Nota pedagógica: Gram-Schmidt produce una base ortogonal; normalizando obtenemos ortonormal.