

Guía de Estudio: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Primer y Segundo Orden — Métodos y Aplicaciones

Martín Ibáñez

Índice

1. Parte 1 — Resumen Conceptual	2
1.1. Clasificación de EDO	2
1.2. Variables Separables	2
1.3. EDO Lineal de Primer Orden	2
1.4. EDO Exactas	2
1.5. EDO de Bernoulli	2
1.6. EDO Lineal de 2° Orden Homogénea con Coeficientes Constantes . . .	3
1.7. Coeficientes Indeterminados	3
1.8. Variación de Parámetros	3
1.9. Aplicaciones Físicas	3
2. Parte 2 — Fórmulas y Definiciones Clave	4
3. Parte 3 — Ejercicios Resueltos Paso a Paso	5

Parte 1 — Resumen Conceptual

Clasificación de EDO

Clasificación

- **Orden:** mayor derivada presente. Ej: $y'' + 3y' = 0$ es orden 2.
- **Grado:** potencia de la mayor derivada. Ej: $(y')^2 + y = 0$ es grado 2.
- **Linealidad:** Lineal si es de la forma $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$. No lineal en caso contrario.
- **Homogeneidad:** $g(x) = 0$ es homogénea; $g(x) \neq 0$ es no homogénea.

Ejemplos: $y'' + y = 0$ (lineal, homogénea, orden 2); $y' = y^2$ (no lineal); $y'' + xy = \sin x$ (lineal, no homogénea).

Variables Separables

EDO Separable

Forma: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. Método: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$.

EDO Lineal de Primer Orden

EDO Lineal 1º Orden

Forma estándar: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$. Solución: $y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}$.

EDO Exactas

EDO Exacta

Forma: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Exacta si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Existe $F(x, y) = C$ con $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$.

EDO de Bernoulli

Bernoulli

Forma: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$, $n \neq 0, 1$. Sustitución $v = y^{1-n}$ reduce a lineal.

EDO Lineal de 2º Orden Homogénea con Coeficientes Constantes

EDO 2º Orden Homogénea

Para $ay'' + by' + cy = 0$, ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$:

- $\Delta > 0$: raíces reales distintas $r_1, r_2 \Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $\Delta = 0$: raíz real doble $r \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
- $\Delta < 0$: raíces complejas $\alpha \pm \beta i \Rightarrow y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Coeficientes Indeterminados

Coeficientes Indeterminados

Para $ay'' + by' + cy = g(x)$. Según $g(x)$ se propone y_p :

- $g(x) = P_n(x)$ (polinomio) $\Rightarrow y_p = A_n x^n + \dots + A_0$
- $g(x) = k e^{rx} \Rightarrow y_p = A e^{rx}$ (si r no es raíz)
- $g(x) = k \cos \omega x$ o $k \sin \omega x \Rightarrow y_p = A \cos \omega x + B \sin \omega x$
- Si la forma propuesta es solución de la homogénea, multiplicar por x .

Variación de Parámetros

Variación de Parámetros

Para $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$. Si y_1, y_2 son LI de la homogénea:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2, \quad u_1' = -\frac{y_2 g}{W}, \quad u_2' = \frac{y_1 g}{W}$$

donde $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ es el Wronskiano.

Aplicaciones Físicas

Oscilador Masa-Resorte

$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$. Frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, amortiguamiento crítico $b_c = 2\sqrt{km}$.

Circuito RC

$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t)$, con corriente $I = \frac{dq}{dt}$.

Parte 2 — Fórmulas y Definiciones Clave

Tabla de Fórmulas Esenciales

Concepto	Fórmula
Factor integrante (1° orden)	$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}, \quad y = \frac{1}{\mu} \int \mu Q dx + \frac{C}{\mu}$
Caso 1 (2° orden, $\Delta > 0$)	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
Caso 2 (2° orden, $\Delta = 0$)	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r x}$
Caso 3 (2° orden, $\Delta < 0$)	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
Wronskiano	$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$
Variación de parámetros	$u_1' = -\frac{y_2 g}{W}, \quad u_2' = \frac{y_1 g}{W}$

Formas de y_p para Coeficientes Indeterminados

$g(x)$	y_p (propuesta)
$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$	$A_n x^n + \dots + A_0$
$k e^{rx}$	$A e^{rx}$
$k \cos \omega x$ o $k \sin \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$P_n(x) e^{rx}$	$(A_n x^n + \dots + A_0) e^{rx}$
$e^{rx} \cos \omega x$ o $e^{rx} \sin \omega x$	$e^{rx} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

Parte 3 — Ejercicios Resueltos Paso a Paso

Nivel Escolar/Introductorio

Ejercicio 1: Separable con condición inicial

Enunciado: Resolver $\frac{dy}{dx} = xy$, con $y(0) = 2$.

Clasificación: EDO de primer orden, separable.

Método: Separación de variables.

Solución:

Paso 1: $\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x dx$

Paso 2: Integrar: $\int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$

Paso 3: Despejar: $y = Ke^{x^2/2}$ con $K = \pm e^C$

Paso 4: Aplicar $y(0) = 2$: $2 = Ke^0 \Rightarrow K = 2$

Resultado: $y = 2e^{x^2/2}$

Nota: Crecimiento exponencial con x^2 en exponente.

Ejercicio 2: Separable (solución general)

Enunciado: Encontrar solución general de $\frac{dy}{dx} = y^2 \sin x$.

Clasificación: EDO de primer orden, separable.

Método: Separación de variables.

Solución:

Paso 1: $\frac{dy}{y^2} = \sin x dx$

Paso 2: Integrar: $\int y^{-2} dy = \int \sin x dx \Rightarrow -y^{-1} = -\cos x + C$

Paso 3: Despejar: $-\frac{1}{y} = -\cos x + C \Rightarrow \frac{1}{y} = \cos x - C$

Resultado: $y = \frac{1}{\cos x - C}$

Nota: Constante C puede ser cualquier número real; cuidado con denominadores cero.

Ejercicio 3: Lineal 1º orden

Enunciado: Resolver $\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$, con $y(0) = 1$.

Clasificación: EDO lineal de primer orden.

Método: Factor integrante.

Solución:

Paso 1: $P(x) = 2$, $Q(x) = 4x$

Paso 2: Factor integrante $\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$

Paso 3: $y = \frac{1}{\mu} \int \mu Q dx = e^{-2x} \int e^{2x} \cdot 4x dx$

Paso 4: $\int 4xe^{2x} dx$ (por partes: $u = 4x$, $dv = e^{2x} dx$): $= 2xe^{2x} - e^{2x} + C$

Paso 5: $y = e^{-2x}(2xe^{2x} - e^{2x} + C) = 2x - 1 + Ce^{-2x}$

Paso 6: $y(0) = 1 \Rightarrow -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

Resultado: $y = 2x - 1 + 2e^{-2x}$

Nota: Término transitorio e^{-2x} desaparece para x grande.

Ejercicio 4: 2° orden homogénea (raíces reales distintas)

Enunciado: Resolver $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Clasificación: EDO lineal 2° orden homogénea, coeficientes constantes.

Método: Ecuación característica.

Solución:

Paso 1: Ecuación característica: $r^2 - 5r + 6 = 0$

Paso 2: Factorizar: $(r - 2)(r - 3) = 0 \Rightarrow r = 2, 3$

Paso 3: Solución general: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

Resultado: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

Nota: Solución creciente exponencialmente; raíces reales distintas.

Ejercicio 5: 2° orden homogénea (raíz repetida)

Enunciado: Resolver $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Clasificación: EDO lineal 2° orden homogénea, coeficientes constantes.

Método: Ecuación característica.

Solución:

Paso 1: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$ (doble)

Paso 2: Solución general: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$

Resultado: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$

Nota: El término lineal x aparece por multiplicidad.

Nivel Universitario

Ejercicio 6: EDO exacta

Enunciado: Resolver $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$.

Clasificación: EDO exacta.

Método: Verificar exactitud y encontrar $F(x, y) = C$.

Solución:

Paso 1: $M = 2xy + y^2$, $N = x^2 + 2xy$

Paso 2: Verificar: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$ (son iguales)

Paso 3: Integrar M respecto a x : $F = \int (2xy + y^2)dx = x^2y + xy^2 + h(y)$

Paso 4: Derivar respecto a y : $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy + h'(y) = N = x^2 + 2xy \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C$

Paso 5: Solución implícita: $x^2y + xy^2 = C$

Resultado: $x^2y + xy^2 = C$

Nota: La solución queda implícita; despejar y puede ser complicado.

Ejercicio 7: Bernoulli

Enunciado: Resolver $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^3$.

Clasificación: EDO de Bernoulli ($n = 3$).

Método: Sustitución $v = y^{1-n} = y^{-2}$.

Solución:

Paso 1: $v = y^{-2} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{2} \frac{dv}{dx}$

Paso 2: Sustituir: $-\frac{y^3}{2} \frac{dv}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^3$

Paso 3: Multiplicar por $-2/y^3$: $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -2x^2$

Paso 4: Como $v = y^{-2}$: $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -2x^2$ (lineal en v)

Paso 5: Factor integrante: $\mu = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$

Paso 6: $v = \frac{1}{\mu} \int \mu(-2x^2)dx = x^2 \int x^{-2}(-2x^2)dx = x^2 \int (-2)dx = x^2(-2x + C)$

Paso 7: $v = -2x^3 + Cx^2 \Rightarrow y^{-2} = -2x^3 + Cx^2$

Resultado: $y^{-2} = Cx^2 - 2x^3$

Nota: La sustitución reduce a lineal, que resolvemos con factor integrante.

Ejercicio 8: 2° orden con raíces complejas y condiciones iniciales

Enunciado: Resolver $y'' + 4y = 0$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Clasificación: EDO lineal 2° orden homogénea, coeficientes constantes.

Método: Ecuación característica.

Solución:

Paso 1: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2$)

Paso 2: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Paso 3: $y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

Paso 4: $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x \Rightarrow y'(0) = 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$

Resultado: $y = \cos 2x + \sin 2x$

Nota: Solución puramente oscilatoria (sin amortiguamiento).

Ejercicio 9: Coeficientes indeterminados

Enunciado: Resolver $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$.

Clasificación: EDO lineal 2° orden no homogénea, coeficientes constantes.

Método: Coeficientes indeterminados.

Solución:

Paso 1: Homogénea: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r - 2) = 0 \Rightarrow y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Paso 2: $g(x) = e^{3x}$, 3 no es raíz $\Rightarrow y_p = Ae^{3x}$

Paso 3: $y'_p = 3Ae^{3x}$, $y''_p = 9Ae^{3x}$

Paso 4: Sustituir: $9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Paso 5: $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$

Resultado: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$

Nota: El método es directo cuando $g(x)$ tiene forma simple.

Ejercicio 10: Variación de parámetros

Enunciado: Resolver $y'' + y = \sec x$.

Clasificación: EDO lineal 2° orden no homogénea.

Método: Variación de parámetros.

Solución:

Paso 1: Homogénea: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

Paso 2: Wronskiano: $W = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Paso 3: $u'_1 = -\frac{y_2 g}{W} = -\sin x \cdot \sec x = -\tan x$

Paso 4: $u'_2 = \frac{y_1 g}{W} = \cos x \cdot \sec x = 1$

Paso 5: Integrar: $u_1 = -\int \tan x dx = \ln |\cos x|$, $u_2 = \int 1 dx = x$

Paso 6: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \ln |\cos x| \cdot \cos x + x \sin x$

Paso 7: $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$

Resultado: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$

Nota: Variación de parámetros siempre funciona, aunque las integrales pueden ser complejas.

Ejercicio 11: Aplicación masa-resorte con resonancia

Enunciado: Sistema masa-resorte: $m = 1$, $b = 0$, $k = 4$, $F(t) = \cos(2t)$. Encontrar $x(t)$.

Clasificación: EDO lineal 2° orden: $x'' + 4x = \cos 2t$.

Método: Coeficientes indeterminados (resonancia).

Solución:

Paso 1: Homogénea: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i \Rightarrow x_h = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

Paso 2: $g(t) = \cos 2t$, pero $2i$ es raíz $\Rightarrow x_p = t(A \cos 2t + B \sin 2t)$

Paso 3: Derivar y sustituir (simplificando): $x'_p = A \cos 2t + B \sin 2t + t(-2A \sin 2t + 2B \cos 2t)$
 $x''_p = -4A \sin 2t + 4B \cos 2t + (-2A \sin 2t + 2B \cos 2t) + t(-4A \cos 2t - 4B \sin 2t)$
 $x''_p + 4x_p = -4A \sin 2t + 4B \cos 2t - 2A \sin 2t + 2B \cos 2t = \cos 2t$

Paso 4: Comparando: coeficiente $\cos 2t$: $4B + 2B = 6B = 1 \Rightarrow B = 1/6$; coeficiente $\sin 2t$: $-4A - 2A = -6A = 0 \Rightarrow A = 0$

Paso 5: $x_p = \frac{t}{6} \sin 2t$

Resultado: $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t}{6} \sin 2t$

Nota: El término $t \sin 2t$ crece sin cota (resonancia).

Ejercicio 12: Aplicación circuito RC

Enunciado: Circuito RC con $R = 100\Omega$, $C = 0,01F$, $V(t) = 12V$ constante. Encontrar $q(t)$ si $q(0) = 0$.

Clasificación: EDO lineal 1º orden: $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$.

Método: Factor integrante.

Solución:

Paso 1: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{V}{R} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{1}q = 0,12$ (pues $RC = 1$)

Paso 2: $P(t) = 1$, $Q(t) = 0,12$, $\mu = e^{\int 1 dt} = e^t$

Paso 3: $q = \frac{1}{e^t} \int e^t \cdot 0,12 dt = e^{-t}(0,12e^t + C) = 0,12 + Ce^{-t}$

Paso 4: $q(0) = 0 \Rightarrow 0,12 + C = 0 \Rightarrow C = -0,12$

Paso 5: Corriente $I(t) = \frac{dq}{dt} = 0,12e^{-t}$

Resultado: $q(t) = 0,12(1 - e^{-t})$

Nota: Carga tiende a valor máximo $CV = 0,12$ exponencialmente.