

Guía de Estudio: Integrales de Línea y Superficie

Cálculo en Varias Variables

Martín Ibáñez

Índice

1. Parte 1 — Resumen Conceptual	2
1.1. Curvas en el espacio	2
1.2. Integral de línea escalar	2
1.3. Integral de línea vectorial	2
1.4. Orientación y curvas cerradas	2
1.5. Teorema de Green	3
1.6. Superficies parametrizadas	3
1.7. Vector normal y diferencial de superficie	3
1.8. Integral de superficie escalar	3
1.9. Integral de flujo	3
1.10. Teorema de Stokes	3
1.11. Teorema de la divergencia de Gauss	4
2. Parte 2 — Fórmulas y Definiciones Clave	5
3. Parte 3 — Ejercicios Resueltos Paso a Paso	6

Parte 1 — Resumen Conceptual

Curvas en el espacio

Una curva en el espacio se puede describir mediante una función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in [a, b]$. La longitud de arco se obtiene integrando el diferencial de arco:

Diferencial de arco

El diferencial de arco ds se define como $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$.

Integral de línea escalar

Para una función escalar $f(x, y, z)$ definida sobre una curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t)$:

Integral de línea escalar

$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$ Geométricamente representa el área de la cerca.^o cortina que se levanta sobre la curva hasta la gráfica de f .

Integral de línea vectorial

Para un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$:

Integral de línea vectorial

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C P dx + Q dy + R dz$ Físicamente representa el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo de C .

Orientación y curvas cerradas

La integral vectorial cambia de signo si se invierte la orientación de la curva. Para curvas cerradas se usa la notación $\oint_C$.

Teorema de Green

Teorema de Green

Sea C una curva cerrada simple, suave a trozos, orientada positivamente, y D la región que encierra. Si $\mathbf{F} = (P, Q)$ tiene derivadas parciales continuas en D :

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Relaciona una integral de línea con una integral doble sobre la región interior.

Superficies parametrizadas

Una superficie puede parametrizarse como $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con $(u, v) \in D$.

Vector normal y diferencial de superficie

Diferencial de superficie escalar

El vector normal es $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. El elemento de superficie escalar es: $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$

Integral de superficie escalar

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

Integral de flujo

Integral de flujo (superficie vectorial)

$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$ Físicamente representa el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de la superficie S .

Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ donde C es el borde orientado de la superficie S .
Generaliza Green a superficies en el espacio.

Teorema de la divergencia de Gauss

Teorema de Gauss

$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$ donde S es una superficie cerrada que encierra el volumen V . Relaciona flujo con divergencia.

Parte 2 — Fórmulas y Definiciones Clave

Tabla de Fórmulas Esenciales

Concepto	Fórmula
Integral de línea escalar	$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) \, dt$
Integral de línea vectorial	$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$
Teorema de Green	$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$
Diferencial de superficie	$dS = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du \, dv$
Integral de flujo	$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, du \, dv$
Teorema de Stokes	$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$
Teorema de Gauss	$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dV$

Parte 3 — Ejercicios Resueltos Paso a Paso

Nivel Escolar/Introductorio

Enunciado: Calcular $\int_C (x + y) ds$ donde C es el segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$.

Solución:

— Parametrización: $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, con $t \in [0, 1]$.

Diferencial de arco: $\mathbf{r}'(t) = (1, 1) \Rightarrow |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$.

Paso 3 — Sustituir: $f(\mathbf{r}(t)) = t + t = 2t$.

Paso 4 — Integrar: $\int_0^1 2t \cdot \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 t dt = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$.

Resultado: $\boxed{\sqrt{2}}$

Nota pedagógica: La parametrización lineal es la más sencilla y el diferencial de arco es constante.

Enunciado: Calcular el trabajo de $\mathbf{F} = (y, x)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$.

Solución:

— Parametrización: $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 2]$.

Paso 2 — Derivada: $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$.

— Campo evaluado: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t^2, t)$.

— Producto punto: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = t^2 \cdot 1 + t \cdot 2t = t^2 + 2t^2 = 3t^2$.

Paso 5 — Integrar: $\int_0^2 3t^2 dt = [t^3]_0^2 = 8$.

Resultado: $\boxed{8}$

Nota pedagógica: El trabajo es la integral de línea del campo vectorial.

Enunciado: Usar Teorema de Green para calcular $\oint_C (2y dx + 3x dy)$ donde C es el rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 1)$.

Solución:

Paso 1 — Identificar: $P = 2y$, $Q = 3x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2$.

2 — Aplicar Green: $\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (3 - 2) dA$.

Paso 3 — Región D: Rectángulo $[0, 2] \times [0, 1]$, área $2 \cdot 1 = 2$.

Paso 4 — Integrar: $\iint_D 1 dA = 2$.

Resultado: $\boxed{2}$

Nota pedagógica: Green transforma la integral de línea en una doble, a menudo más simple.

Enunciado: Calcular $\iint_S 2z dS$ sobre el plano $z = 1 - x - y$ en el primer octante.

Solución:

— Parametrización: $z = 1 - x - y$ con $x, y \geq 0$ y $x + y \leq 1$. Tomamos $u = x$, $v = y$.

2 — Vector normal: $\mathbf{r}_x = (1, 0, -1)$, $\mathbf{r}_y = (0, 1, -1)$. $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1, 1, 1)$.

Paso 3 — Módulo: $|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{3}$.

Paso 4 — Sustituir: $z = 1 - x - y$, $f = 2z = 2(1 - x - y)$.

Paso 5 — Integrar: $\iint_D 2(1 - x - y)\sqrt{3} dA = 2\sqrt{3} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (1 - x - y) dy dx$.

Paso 6 — Evaluar: $\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = (1 - x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$. Luego $\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}$. Total:
 $2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resultado: $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Nota pedagógica: Para superficies dadas explícitamente, la parametrización natural usa las variables independientes.

Nivel Universitario

Enunciado: Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ con $\mathbf{F} = (-y, x, z^2)$ sobre la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ para $t \in [0, \pi]$.

Solución:

Paso 1 — Derivada: $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$.

— Campo evaluado: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (-\sin t, \cos t, t^2)$.

— Producto punto: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + t^2 \cdot 1 = \sin^2 t + \cos^2 t + t^2 = 1 + t^2$.

Paso 4 — Integrar: $\int_0^\pi (1 + t^2) dt = [t + \frac{t^3}{3}]_0^\pi = \pi + \frac{\pi^3}{3}$.

Resultado: $\boxed{\pi + \frac{\pi^3}{3}}$

Nota pedagógica: La simplificación trigonométrica $\sin^2 + \cos^2 = 1$ facilita la integral.

Enunciado: Verificar el Teorema de Green para $\mathbf{F} = (e^x + y, x^2 + e^y)$ en la región $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$.

Solución:

Calcular rotacional: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1$.

2 — Integral doble: $\iint_D (2x - 1) dA = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x (2x - 1) dy dx = \int_0^1 (2x - 1)x dx = \int_0^1 (2x^2 - x) dx$.

Paso 3 — Evaluar: $\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

— Integral de línea: Se parametriza el borde (3 tramos). Tramo1: $(t, 0), t : 0 \rightarrow 1$; Tramo2: $(1, t), t : 0 \rightarrow 1$; Tramo3: $(t, t), t : 1 \rightarrow 0$. Sumando se obtiene $\frac{1}{6}$.

Resultado: $\boxed{\frac{1}{6}}$ (coinciden)

Nota pedagógica: Verificar el teorema con un ejemplo concreto refuerza la comprensión.

Enunciado: Calcular el flujo de $\mathbf{F} = (x, y, 0)$ a través de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$.

Solución:

— Parametrización: $\mathbf{r}(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z), \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 3]$.

Vectores tangentes: $\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0), \mathbf{r}_z = (0, 0, 1)$.

Paso 3 — Normal: $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ (apunta radialmente, correcto para flujo saliente).

— Campo evaluado: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta, z)) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$.

— Producto punto: $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z) = 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta = 4$.

Paso 6 — Integrar: $\int_0^3 \int_0^{2\pi} 4 d\theta dz = 4 \cdot 2\pi \cdot 3 = 24\pi$.

Resultado: $\boxed{24\pi}$

Nota pedagógica: La normal se orienta según la regla de la mano derecha.

Enunciado: Usar Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ con $\mathbf{F} = (-y^2, x, z^2)$ y C es la intersección de $x^2 + y^2 = 1$ y $z = x + y$, orientada positivamente respecto al eje z .

Solución:

Calcular rotacional: $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - (-2y)) = (0, 0, 1 + 2y).$

Paso 2 — Superficie S : Plano $z = x + y$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Paso 3 — Parametrizar S : $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x + y)$, con $(x, y) \in D$.

Paso 4 — Normal: $\mathbf{r}_x = (1, 0, 1)$, $\mathbf{r}_y = (0, 1, 1)$. Producto cruz: $(-1, -1, 1)$. Orientación: El borde se recorre antihorario visto desde arriba, la normal debe apuntar hacia arriba, verificamos que la componente z es positiva ($1 > 0$), correcta.

Paso 5 — Stokes: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (0, 0, 1 + 2y) \cdot (-1, -1, 1) dA = \iint_D (1 + 2y) dA$.

Paso 6 — Integrar: Por simetría, $\iint_D 2y dA = 0$. Luego $\iint_D 1 dA = \text{Área}(D) = \pi$.

Resultado: $\boxed{\pi}$

Nota pedagógica: Stokes convierte la integral de línea en una de superficie, a menudo más fácil.

Enunciado: Aplicar Gauss para calcular el flujo de $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Solución:

Paso 1 — Divergencia: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

Paso 2 — Teorema de Gauss: $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV$.

Paso 3 — Coordenadas esféricas: $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$.

Paso 4 — Límites: $\rho \in [0, 2]$, $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Paso 5 — Integrar: $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^2 \rho^4 d\rho$.

Paso 6 — Evaluar: $3 \cdot (2\pi) \cdot (2) \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 = 12\pi \cdot \frac{32}{5} = \frac{384\pi}{5}$.

Resultado: $\boxed{\frac{384\pi}{5}}$

Nota pedagógica: Gauss es ideal para superficies cerradas.

Enunciado: Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con $\mathbf{F} = (x, y, z)$ sobre el cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, eligiendo el método más eficiente.

Solución:

Paso 1 — Justificación: Superficie cerrada $\Rightarrow$ Teorema de Gauss es más eficiente.

Paso 2 — Divergencia: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Paso 3 — Volumen: $V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

4 — Aplicar Gauss: $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot 1 = 3$.

Resultado: 3

Nota pedagógica: Siempre evaluar si un teorema (Gauss, Stokes, Green) simplifica el problema antes de parametrizar directamente.